3ο online μάθημα

2/4/2020

Εισαγωγή στην Τοπολογία

Πρόταση: Έστω (X,ρ) $x\in X$ και $A\subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Το x είναι σημείο συσσώρευσης του A

(ii) $\forall \varepsilon>0$ το σύνολο $B_\rho(x,\varepsilon)\cap A$ είναι άπειρο

Απόδειξη:

(ii) => (i) $\forall \varepsilon>0$ το σύνολο $B_\rho(x,\varepsilon)\cap A$ είναι άπειρο

άρα και το σύνολο $B_\rho(x,\varepsilon)\cap A\setminus\{x\}$ είναι άπειρο

άρα μη κενό.

(i) => (ii) Έστω ότι το x είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Έστω $\varepsilon>0$. Υποθέτω (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι το σύνολο

$B_\rho(x,\varepsilon)\cap A$ είναι πεπερασμένο.

Έστω $B_\rho(x,\varepsilon)\cap A\setminus\{x\}=\{x_1,\dots x_n\}$

Θέτουμε $\delta=\min\{\rho(x,x_1),\dots,\rho(x,x_n)\}$

Τότε $\delta>0$ και $B_\rho(x,\delta)\cap A\setminus\{x\}=\emptyset$ άτοπο εφόσον $x\in A'$

Επομένως το $B_\rho(x,\varepsilon)\cap A$ είναι άπειρο σύνολο

Ορισμός: (X,ρ) μ.χ. $A\subseteq X$. Ένα $x\in X$ λέγεται συνοριακό σημείο του A αν είναι σημείο επαφής του A και του $X\setminus A$.

Το σύνορο του A είναι το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων του A και συμβολίζεται με ∂A ή $bd(A)$ (ή $bd_\rho(A)$ αν θέλουμε να τονίσουμε τη μετρική ρ)

$\partial A = bd A = \bar{A}\cap\overline{X\setminus A}$

Εφόσον $\overline{X\setminus A}=X\setminus A^{\circ}$ συμπεραίνουμε ότι $\partial A=\bar{A}\setminus A^{\circ}$

Παράδειγμα: Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική ρ θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{Q}$

$\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}^\circ = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$

$\partial[a,b) = \overline{[a,b)} \setminus [a,b)^\circ = [a,b] \setminus (a,b) = \{a,b\}$

$\partial[a,+\infty) = \overline{[a,+\infty)} \setminus [a,+\infty)^\circ = [a,+\infty) \setminus (a,+\infty) = \{a\}$

Πρόταση (Σχετικά κλειστά σύνολα): Έστω (X,ρ) μ.χ., $A \subseteq X$ και ρ_A η σχετική μετρική στο A

(a) Για $F \subseteq A$

Το F είναι κλειστό στο μ.χ. (A,ρ_A) αν-ν υπάρχει κλειστό υποσύνολο K του X ώστε $F = A \cap K$

Απόδειξη: (a) $\Rightarrow$) Αν το F είναι κλειστό στο A τότε το $A \setminus F$ είναι ανοικτό στο A άρα υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο G του X τ.ω. $A \setminus F = G \cap A$ τότε

$F = A \setminus (A \setminus F) = A \setminus (G \cap A) = A \setminus G = A \cap (X \setminus G)$

άρα για $K = X \setminus G$ έχουμε ότι το K είναι κλειστό στο X και $F = A \cap K$.

$\Leftarrow$) Αν υπάρχει K κλειστό στο X ώστε $F = A \cap K$

Τότε $A \setminus F = A \setminus (A \cap K) = A \cap (X \setminus K)$ με το $X \setminus K$ να είναι ανοικτό στο X. Άρα το $A \setminus F$ είναι ανοικτό στο A δηλαδή το F είναι κλειστό στο A.

(b) Για κάθε $B \subseteq A$ ισχύει $cl_{\rho_A}(B) = A \cap cl_\rho(B)$

όπου $cl_\rho(B)$ η κλειστή θήκη του B στο μ.χ. (X,ρ)

και $cl_{\rho_A}(B)$ η κλειστή θήκη του B στο μ.χ. (A,ρ_A)

Απόδειξη: (b) Έστω $B \subseteq A$

Το $A \cap cl_\rho(B)$ είναι (σύμφωνα με το (a)) κλειστό στο A και περιέχει το B (αφού $B \subseteq A$ και $B \subseteq cl_\rho(B)$)

Συνεπώς $cl_{\rho_A}(B) \subseteq A \cap cl_\rho(B)$

Αντίστροφα, έστω F τυχόν κλειστό στο A (στη σχετική μετρική) με $B \subseteq F$ (και θα δείξουμε ότι $A \cap Cl_\rho(B) \subseteq F$). Τότε υπάρχει (από το (α)) κλειστό υποσύνολο K του X ώστε $F = A \cap K$.

Και άρα
$$Cl_\rho(B) \subseteq Cl_\rho(A \cap K) \subseteq Cl_\rho(K) = K$$

άρα
$$A \cap Cl_\rho(B) \subseteq A \cap K = F$$

Συνεπώς
$$A \cap Cl_\rho(B) \subseteq \cap \{F : F \text{ κλειστό στο } A,\ B \subseteq F\}$$

δηλαδή
$$A \cap Cl_\rho(B) \subseteq Cl_{\rho_A}(B)$$

Επομένως
$$A \cap Cl_\rho(B) = Cl_{\rho_A}(B)$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική ρ.

Θεωρούμε το $A = [0,1) \cup \{2\} \cup (3,5]$

i) Τα σύνολα $[0,1)$, $\{2\}$, $(3,5]$

είναι ταυτόχρονα ανοιχτά και κλειστά στο A. ...

Πράγματι $[0,1) = A \cap (-1,1)$ με το $(-1,1)$ ανοιχτό στο $\mathbb{R}$, άρα το $[0,1)$ είναι ανοιχτό στο A.

Επίσης $[0,1) = A \cap [0,1]$ με το $[0,1]$ κλειστό στο $\mathbb{R}$ άρα το $[0,1)$ είναι κλειστό στο A

...

$\{2\} = A \cap (\frac{3}{2}, 3)$ με το $(3/2, 3)$ ανοιχτό στο $\mathbb{R}$ άρα το $\{2\}$ είναι ανοιχτό στο A

$\{2\} = A \cap \{2\}$ με το $\{2\}$ κλειστό στο $\mathbb{R}$ άρα το $\{2\}$ είναι κλειστό στο A.

$(3,5] = A \cap (3,7)$ με το $(3,7)$ ανοιχτό στο $\mathbb{R}$ άρα $(3,5]$ ανοιχτό στο A.

$(3,5] = A \cap [5/2, 5]$ με το $[5/2, 5]$ κλειστό στο $\mathbb{R}$ άρα το $(3,5]$ είναι κλειστό στο A.

(ii) $B = [3,4]$ τότε

$$Cl_{\rho_A}(B) = A \cap Cl_\rho(B) = ([0,1) \cup \{8\} \cup (3,5]) \cap [3,4] = (3,4]$$

<u>Χαρακτηρισμοί τοπολογικών εννοιών με χρήση ακολουθιών</u>

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μ.χ. και $A \subseteq X$

(i) Για $x \in X$ ισχύει $x \in A^\circ$ αν-ν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in A$ $\forall n \geq n_0$

(ii) Το A είναι ανοικτό αν-ν $\forall x \in A$ και κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in A$ $\forall n \geq n_0$.

Απόδειξη: Το (ii) είναι άμεση συνέπεια του (i) διότι το A είναι ανοικτό αν-ν $A \subseteq A^\circ$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε το (i)

Έστω $x \in A^\circ$ και έστω ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X με $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

Εφόσον $x \in A^\circ$ υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x,\epsilon) \subseteq A$

Αφού $x_n \xrightarrow{\rho} x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in B_\rho(x,\epsilon)$ $\forall n \geq n_0$

άρα $x_n \in A$ $\forall n \geq n_0$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $x \notin A^\circ$. Τότε $\forall \epsilon > 0$ $B_\rho(x,\epsilon) \nsubseteq A$, δηλαδή $B_\rho(x,\epsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$

Εφαρμόζοντας αυτό για $\epsilon = \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να επιλέξουμε $x_n \in B_\rho(x, \frac{1}{n}) \cap (X \setminus A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Εφόσον $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\rho(x_n, x) \to 0$ άρα $x_n \xrightarrow{\rho} x$

Από την υπόθεση συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in A$ για κάθε $n \geq n_0$ που είναι άτοπο διότι τα x_n τα επιλέξαμε ώστε $x_n \in X \setminus A$

Επομένως $x \in A^\circ$.

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μ.χ. και $A \subseteq X$.

(i) Για $x \in X$ ισχύει $x \in \bar{A}$ αν-ν υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n \xrightarrow{\rho} x$

(ii) Το A είναι κλειστό αν-ν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A και $x \in X$ με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ ισχύει $x \in A$.

Απόδειξη: Το (ii) είναι άμεση συνέπεια του (i) διότι το A είναι κλειστό αν-ν $\bar{A} \subseteq A$. Αρκεί να δείξουμε το (i).

(i) Αν $x \in \bar{A}$ τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει $B_\rho(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$ και άρα μπορούμε να επιλέξουμε $x_n \in B_\rho(x, \frac{1}{n}) \cap A$.

Έτσι $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε $x_n \in A$ και $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n}$

Άρα η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελείται από στοιχεία του A και ισχύει $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

Αντίστροφα, αν υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ θα δείξουμε ότι $x \in \bar{A}$.

Έστω $\epsilon > 0$. Εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} x$ $\exists n \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x) < \epsilon$ άρα $x_n \in B_\rho(x, \epsilon)$. Εφόσον επίσης $x_n \in A$ συμπεραίνουμε ότι $B_\rho(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$

Αφού αυτό συμβαίνει για κάθε $\epsilon > 0$ συμπεραίνουμε ότι $x \in \bar{A}$.

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μ.χ. και $A \subseteq X$, $x \in X$. Τότε $x \in A'$ αν-ν υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n \neq x$ για κάθε n ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

Απόδειξη: Εφόσον $x \in A' \Leftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ το συμπέρασμα προκύπτει από το (i) της προηγούμενης πρότασης

Πρόταση: (X,ρ) μ.χ. , $A \subseteq X$, $x \in X$

$x \in \partial A \Leftrightarrow$ υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A και ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $X \setminus A$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $y_n \xrightarrow{\rho} x$

Απόδειξη: $x \in \partial A \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$

$\Leftrightarrow x \in \bar{A}$ και $x \in \overline{X \setminus A}$

και το συμπέρασμα προκύπτει από το χαρακτηρισμό της κλειστής θήκης με ακολουθίες.

Πρόταση: (X,ρ) μ.χ. , $A \subseteq X$, $x \in X$.

Τότε $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \rho(x,A) = 0$

Απόδειξη: $\Leftarrow$) Αν $\rho(x,A)=0$ δηλαδή $\inf\{\rho(x,y) : y \in A\} = 0$

Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $y \in A$ με $\rho(x,y) < \epsilon$ άρα $B_\rho(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$

Αφού αυτό συμβαίνει για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε $x \in \bar{A}$.

$\Rightarrow$) Έστω $x \in \bar{A}$. Θα δείξουμε ότι $\inf\{\rho(x,y) : y \in A\} = 0$

Προφανώς το 0 είναι κάτω φράγμα του συνόλου επίσης για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $A \cap B_\rho(x,\epsilon) \neq \emptyset$ δηλαδή υπάρχει $y \in A$ με $\rho(x,y) < \epsilon$.

Άρα $\inf\{\rho(x,y) : y \in A\} = 0$ δηλαδή $\rho(x,A) = 0$

Πόρισμα: Έστω (X,ρ) μ.χ. και $A \subseteq X$. Το σύνολο A είναι κλειστό αν-ν για κάθε $x \in X \setminus A$ ισχύει $\rho(x,A) > 0$

Απόδειξη: Πράγματι

A κλειστό $\Leftrightarrow \bar{A} \subseteq A$

$\Leftrightarrow$ για κάθε $x \in X$ $(x \in \bar{A} \Rightarrow x \in A)$

$\Leftrightarrow$ για κάθε $x \in X$ (αν $\rho(x,A) = 0 \Rightarrow x \in A$)

$\Leftrightarrow$ για κάθε $x \in X$ $(x \notin A \Rightarrow \rho(x,A) > 0)$

Προηγούμενη πρόταση

$\Leftrightarrow$ για κάθε $x \in X \setminus A$ ισχύει $\rho(x,A) > 0$

Πυκνά σύνολα και διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι

Ορισμός: Έστω (X,ρ) μ.χ. ένα $D\subseteq X$ λέγεται πυκνό αν $\bar{D}=X$.

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μ.χ. και $D\subseteq X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) D πυκνό

(ii) Για κάθε ανοικτό μη κενό υποσύνολο G του X ισχύει $D\cap G\neq\emptyset$

(iii) Για κάθε $x\in X$ υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο D με $x_n \xrightarrow{\rho} x$

Απόδειξη: D πυκνό αν-ν $X\subseteq\bar{D}$ άρα η ισοδυναμία (i) <-> (iii) είναι συνέπεια του χαρακτηρισμού της κλειστής θήκης με ακολουθίες.

(i) -> (ii) Υποθέτουμε ότι D πυκνό.

Έστω G τυχόν ανοικτό μη κενό. Τότε υπάρχει $x\in G$ και εφόσον G ανοικτό υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon)\subseteq G$. Εφόσον D πυκνό ισχύει $x\in\bar{D}$ άρα $D\cap B_\rho(x,\varepsilon)\neq\emptyset$.

Συνεπώς $D\cap G\neq\emptyset$.

(ii) -> (i) Υποθέτουμε ότι το D τέμνει κάθε ανοικτό μη κενό σύνολο.

Θ.δ.ο. το D είναι πυκνό.

Έστω $x\in X$. (και θ.δ.ο. $x\in\bar{D}$)

Για κάθε $\varepsilon>0$ η $B_\rho(x,\varepsilon)$ είναι ανοικτό μη κενό σύνολο άρα (από υπόθεση) $D\cap B_\rho(x,\varepsilon)\neq\emptyset$

Συνεπώς $x\in\bar{D}$. Επομένως το D είναι πυκνό.

Παραδείγματα: α) Τα $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ είναι πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική.

β) Στον $\mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια μετρική τα σύνολα $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\times\mathbb{Q}$ και $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ είναι πυκνά

Ορισμός: Έστω (X,ρ) μ.χ. Μια οικογένεια $\mathcal{B}$ ανοικτών υποσυνόλων του X λέγεται <u>βάση για τα ανοικτά σύνολα X</u> ή <u>βάση για την τοπολογία του X</u> αν για κάθε $G \subseteq X$ ανοικτό υπάρχει οικογένεια $(B_i)_{i\in I}$ στη $\mathcal{B}$ ώστε $G = \bigcup_{i\in I} B_i$

Παράδειγμα: Έστω (X,ρ) μ.χ.

a) Η οικογένεια $\{B_\rho(x,\varepsilon)\ x\in X, \varepsilon>0\}$ είναι μια βάση για την τοπολογία του X. Πράγματι, αν G είναι ανοικτό στο X τότε για κάθε $x\in G$ υπάρχει $\varepsilon_x>0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon_x)\subseteq G$. Τότε $G = \bigcup_{x\in G} B_\rho(x,\varepsilon_x)$

β) Η $\{B_\rho(x,q)\ x\in X, q\in\mathbb{Q}, q>0\}$ καθώς και η $\{B_\rho(x,\frac{1}{n}); x\in X, n\in\mathbb{N}\}$ είναι βάσεις για την τοπολογία του X.

Παρατήρηση: Έστω (X,ρ) μ.χ. και $\mathcal{B}$ μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) Η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία του X.

(ii) Για κάθε G ανοικτό και κάθε $x\in G$ υπάρχει $B\in\mathcal{B}$ ώστε $x\in B\subseteq G$

Απόδειξη: (i) => (ii) Έστω G ανοικτό και $x\in G$. Από υπόθεση υπάρχει μια οικογένεια $(B_i)_{i\in I}$ της $\mathcal{B}$ ώστε $G=\bigcup_{i\in I} B_i$

$x\in G \Rightarrow x\in \bigcup_{i\in I} B_i$ άρα $\exists i_0\in I$ ώστε $x\in B_{i_0}$

Τότε $x\in B_{i_0}\subseteq G$

(ii) => (i) Έστω τυχόν $G\subseteq X$, G ανοικτό

Για κάθε $x\in G$ υπάρχει $B_x\in\mathcal{B}$ ώστε $x\in B_x\subseteq G$

Τότε $G=\bigcup_{x\in G} B_x$.

Άρα η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία του X.

Ορισμός: Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) λέγεται διαχωρίσιμος αν υπάρχει $D\subseteq X$ με D αριθμήσιμο και πυκνό

Σημείωση: Το σύνολο D το λέμε αριθμήσιμο αν είναι είτε πεπερασμένο είτε ισοπληθικό με το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών

Παραδείγματα: α) Κάθε μ.χ. (X,ρ) με X πεπερασμένο είναι διαχωρίσιμος.
β) Ο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική είναι διαχωρίσιμος αφού το $\mathbb{Q}$ είναι ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολό του.
γ) Ο $\mathbb{R}^k$ με την ευκλείδεια μετρική ρ_2 είναι διαχωρίσιμος, αφού το

$$\mathbb{Q}^k = \underbrace{\mathbb{Q}\times\dots\times\mathbb{Q}}_{k\text{-φορές}}$$

είναι αριθμήσιμο και πυκνό

Το ίδιο συμβαίνει και για τις μετρικές ρ_p $1\le p<\infty$ και η ρ_∞.

Θεώρημα: Έστω (X,ρ) μ.χ. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα
(i) Ο X είναι διαχωρίσιμος
(ii) Υπάρχει μια αριθμήσιμη βάση $\mathcal{B}$ για την τοπολογία του X.

Απόδειξη: (i) => (ii) Εφόσον ο X είναι διαχωρίσιμος υπάρχει ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο D του X. Θέτουμε

$$\mathcal{B} = \{ B_\rho(y,q) \quad y\in D,\ q\in\mathbb{Q}^+ \}$$

Το $\mathcal{B}$ αποτελείται από ανοικτά σύνολα (αφού οι ανοικτές μπάλες είναι ανοικτά σύνολα) και είναι αριθμήσιμο διότι τα D, $\mathbb{Q}^+$ είναι αριθμήσιμα άρα το $D\times\mathbb{Q}^+$ είναι αριθμήσιμο
Δείχνουμε τώρα ότι η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία του X (θα χρησιμοποιήσουμε την προηγούμενη παρατήρηση)
Έστω $G\subseteq X$, G ανοικτό και $x\in G$.
Τότε υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon)\subseteq G$.

Επιλέγουμε $q \in \mathbb{Q}$ με $0 < q < \varepsilon/2$

Εφόσον το D είναι πυκνό και το $B_\rho(x,q)$ είναι ανοικτό μη κενό έχουμε $D \cap B_\rho(x,q) \neq \emptyset$ άρα υπάρχει $y \in D$ με $\rho(x,y) < q$

Τότε $B_\rho(y,q) \subseteq G$. Πράγματι αν $z \in B_\rho(y,q)$ τότε $\rho(z,y) < q$.

Άρα $\rho(z,x) \leq \rho(z,y) + \rho(y,x) < q + q = 2q < \varepsilon$

Συνεπώς $z \in B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq G$ άρα $z \in G$.

Έτσι το $B_\rho(y,q)$ ανήκει στη $\mathcal{B}$ και $x \in B_\rho(y,q) \subseteq G$

Έτσι έχουμε δείξει ότι η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία του X

(ii) => (i) Αντίστροφα υποθέτουμε ότι υπάρχει αριθμήσιμη βάση $\mathcal{B}$ για την τοπολογία του X. Από κάθε μη κενό σύνολο B της $\mathcal{B}$ επιλέγουμε $x_B \in B$.

Θέτουμε $D = \{ x_B : B \in \mathcal{B} \}$.

Τότε το D είναι αριθμήσιμο (εφόσον η $\mathcal{B}$ είναι αριθμήσιμη) και πυκνό αφού τέμνει κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X.

Άρα ο X διαχωρίσιμος.